CHAPITRE VI

INTÉGRATION

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Intégrale d'une fonction continue ou continue par morceaux.

1.1. Qu'est-ce que l'intégrale d'une fonction continue sur un segment ?

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. L'intégrale de f entre a et b est un nombre qui représente l'aire sous le graphe de f délimitée par les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses. Cette aire doit être comptée positivement lorsque la courbe est au dessus de l'axe des abscisse et négativement sinon.

Si cette définition en restait là (l'aire sous la courbe), nous n'aurions pas produit une notion mathématique très solide. En effet, cette approche repose sur la notion "d'aire"... qui est elle-même traditionnellement définie par une intégrale. Et nous tournons en rond !

La définition suivante résout ce problème puisqu'elle *définit* l'intégrale en même temps qu'elle *définit* l'aire sous la courbe.

Théorème : Sommes de Riemann.

Soit a et b deux réels, et f une fonction continue sur $[a; b]$ avec $a < b$. Notons, pour $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente.

Démonstration. Admis. Attention, dans ce théorème, il est très important de supposer f continue. □

Définition : Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. La limite de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ du théorème précédent est appelé l'intégrale de la fonction f entre a et b. On la note $\int_a^b f(t)dt$. Autrement dit,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Corollaire : Cas $a = 0$ et $b = 1$

Pour tout fonction f continue sur $[0; 1]$, la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ définie pour tout $n \in N$ par

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

est convergente et a pour limite $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

Remarque 1.1.1. Cette définition est très mal adaptée pour faire du calcul. Dans la pratique, il ne sera **jamais** question de calculer une intégrale par la limite de la suite $(S_n)_n$. Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous donner plusieurs outils pour contourner cette difficulté. En revanche cette définition avec les sommes de Riemann peut être utilisée pour construire un algorithme qui donne une valeur approchée de l'intégrale.

Méthode : Méthode des rectangles pour le calcul approchée d'intégrale.

On considère une fonction f continue sur un intervalle I et deux points $a < b$ tous les deux inclus dans I. On construit un algorithme qui donne une approximation de l'intégrale entre a et b de f. Il suffit donc de générer les termes de la suite $(S_n)_n$. On suppose que l'on a déjà défini la fonction à intégrer f.

```python
def Riemann(n):
  S=0
  for i in range (n) :
    S = S + ((b-a)/n)*f(a+i*(b-a)/n)
  return S

```

D'autre part, il est aussi fréquent que l'on connaisse déjà la valeur d'une intégrale (grâce aux méthodes de la suite du chapitre) et que l'on veuille en déduire la limite des sommes de Riemann.

Méthode : Sommes de Riemann

Il faut identifier a, b puis la fonction f et utiliser le théorème 1.1.

Exercice 1.1.2. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 1.1.3. **1.** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

1.2. Primitives d'une fonction continue.

Définition : Primitive

On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si F est définie et dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Théorème : Primitives d'une fonction continue.

Toute fonction continue sur un intervalle I possède au moins une primitive sur I.

Deux primitives F et G d'une même fonction continue f diffèrent d'une constante : il existe un réel k tel que $G = F + k$.

Démonstration. On admet l'existence : il s'agirait précisément de montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

avec a un point quelconque de I est un primitive de f sur I. Ça n'est pas insurmontable mais c'est assez technique.

La deuxième partie (unicité à une constante près) résulte de : $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ donc $F - G$ est constante. □

Il est absolument indispensable de bien connaître le tableau suivant.

Proposition : Primitives usuelles et opérations sur les primitives.

Formules usuelles (k est une constante réelle) :

Fonctions de référence	Primitives	Domaine d'existence
$x \mapsto a \in \mathbb{R}$ (constante)	$x \mapsto ax \quad (+k)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (+k)$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $-\alpha \in \mathbb{N}^*$)
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\left(\lvert x\rvert\right) \quad (+k)$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x \quad (+k)$	$\mathbb{R}$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, F une primitive de f et G une primitive de g.

Opérations	Primitives	Domaine d'existence
Somme : $f+g$	$F+G \quad (+k)$	I
produit par une constante : $\lambda \times f$	$\lambda \times F \quad (+k)$	I

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonctions composées	Primitives	Domaine d'existence
$u^\alpha \times u'$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (+k)$	$\{x \in I \ / \ u(x) > 0\}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\left(\lvert u\rvert\right) \quad (+k)$	$\{x \in I \ / \ u(x) \neq 0\}$
$e^u \times u'$	$e^u \quad (+k)$	I

Démonstration. Il s'agit de dériver les fonctions de la colonne du milieu et de constater que les dérivées sont bien égales aux fonctions de la colonne de gauche. □

1.3. **Calcul de l'intégrale à l'aide d'une primitive.** Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Dans le paragraphe précédent, nous avions admis que la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de la fonction f. On en déduit alors le résultat suivant

Corollaire : Intégrale et primitive.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et a, b deux éléments de I, et F une primitive de f sur I. Alors le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de F et on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.3.1. En pratique, pour le calcul d'une intégrale, on choisit la primitive la plus "simple" à exprimer (sans constante additive).

On déduit de cette discussion une méthode fondamentale pour le calcul explicite d'une intégrale. En effet on sait qu'une primitive de f est une fonction qui vérifie $F'(x) = f(x)$ de sorte que **si la fonction à intégrer est une dérivée, on sait calculer son intégrale** grâce à la formule

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

car f est une primitive évidente de f'. Résumons-nous :

Méthode : Calcul d'intégrale à l'aide d'une primitive connue.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que l'on arrive à exprimer f comme la dérivée d'une autre fonction g (c'est-à-dire que $g' = f$). Dans ce cas, on peut calculer l'intégrale de f par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a).$$

Ainsi on a tout intérêt à chercher à exprimer la fonction à intégrer comme une dérivée.

Exemple 1.3.2. Justifier l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{t\ln(t)}dt$.

Exercice 1.3.3. **1.** Calculer de deux manières différentes : $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1+x)^n\,dx$.

2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

1.4. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Définition : Prolongement par continuité.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a; b]$. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ existe et est finie (notons la c), on dit que f est prolongeable par continuité en a, et on appelle **prolongement par continuité** de f la fonction g définie sur $[a; b]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in]a; b] \\ g(a) = c \end{cases}$$

La fonction g est alors définie et continue sur $[a; b]$.

Remarque 1.4.1. Les fonctions f est g ne sont pas égales (elles n'ont pas le même domaine de définition).

Définition : Intégrale d'une fonction prolongeable par continuité sur un segment.

Soit f une fonction définie sur $]a;b]$ et admettant un prolongement par continuité g défini sur $[a;b]$. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

Remarque 1.4.2. La fonction g est continue sur $[a;b]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est bien définie.

Exemple 1.4.3. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,dt$.

Définition : Fonction continue par morceaux.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$. On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a;b]$ s'il existe des nombres x_0, x_1, ..., x_n (une subdivision de $[a;b]$) tels que :

- $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$.
- f est continue sur $[a,b]$ sauf éventuellement en x_i pour $i \in \{0,\cdots,n\}$,
- f possède une limite finie à droite en $x_0 = a$, à gauche en $x_n = b$, et à gauche et à droite en chaque x_i ($i \in \{1,\cdots,n-1\}$).

Remarque 1.4.4.

- Les limites à gauche et à droite en x_i ne sont pas nécessairement les mêmes, elles ne correspondent pas non plus forcément à la valeur $f(x_i)$.
- Il faut bien faire la différence entre une fonction continue par morceaux et une fonction prolongeable par continuité.
- Dans le cadre précédent, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est appelée subdivision "adaptée" à f. Bien sûr, il n'y a pas unicité de la subdivision adaptée.

Exemple 1.4.5. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[0;5]$.

Définition : Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision adaptée à f. Chacune des restrictions de f à $]x_i, x_{i+1}[$ est alors prolongeable par continuité, notons $g_0, g_1 \cdots, g_n$ ces prolongements. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(t)\,dt.$$

Exemple 1.4.6. Soit f la fonction partie entière, continue par morceaux sur l'intervalle $[0;5]$. Une subdivision adaptée à f est définie par : $x_0 = 0 = a$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ et $x_5 = 5 = b$.

On a alors :

$$\int_0^5 \lfloor t \rfloor\,dt = \sum_{i=0}^{4} \int_i^{i+1} \lfloor t \rfloor\,dt = \sum_{i=0}^{4} \int_i^{i+1} i\,dt = \sum_{i=0}^{4} i = \frac{4\times(4+1)}{2} = 10.$$

Exercice 1.4.7. Soit f définie par : $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 10 & \text{si } x = 2 \\ x^2-1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 3 \leq x < 5 \end{cases}$

1. Quel est le domaine de définition D de f ?

2. f est-elle continue par morceaux sur D ?

3. f est-elle prolongeable par continuité en 5 ?

4. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(t)\,dt$.

1.5. **Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle du type** $[a,+\infty[$ **ou** $]-\infty,b]$**.**

Définition : Intégration sur un intervalle fermé non borné $[a,+\infty[$ **ou** $]-\infty,b]$**.**

Soit f et g deux fonctions continues respectivement sur $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$.

- Si $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(t)\,dt$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est **convergente** et on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(t)\,dt.$$

- Si $\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\int_y^b g(t)\,dt$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(t)\,dt$ est **convergente** et on pose :

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = \lim_{y\to-\infty}\int_y^b f(t)\,dt.$$

- Une intégrale généralisée est dite divergente dans le cas contraire.

Remarque 1.5.1. Autrement dit, ces intégrales sont convergentes si les primitives de f (resp. g) admettent une limite finie en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 1.5.2. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des intégrales suivantes et les calculer si elles sont convergentes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} e^{t}\,dt$.

1.6. **Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle du type** $[a;b[$ **ou** $]a;b]$ **(hors programme).** On a déjà vu le cas d'une fonction continue f sur $[a;b[$ (resp. g sur $]a;b]$) admettant une limite finie en a (resp. b) : on définit le prolongement par continuité h de f (resp. g) et on définit l'intégrale de f (resp. g) entre a et b comme étant égale à l'intégrale de la fonction continue h sur le segment $[a;b]$ (voir la définition 1.4). Mais ce n'est pas parce que la fonction n'est pas prolongeable par continuité qu'on ne peut pas définir quand même son intégrale.

Définition : Intégration sur un intervalle semi-ouvert borné $[a;b[$ **ou** $]a;b]$**.**

Soit f et g deux fonctions continues respectivement sur $[a;b[$ et $]a;b]$.

- Si $\displaystyle\lim_{y\to b}\int_a^y f(t)\,dt$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est **convergente** et on pose :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{y\to b}\int_a^y f(t)\,dt.$$

- Si $\lim_{y\to a}\int_y^b g(t)\,dt$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b g(t)\,dt$ est **convergente** et on pose :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{y\to a}\int_y^b g(t)\,dt.$$
- Une intégrale généralisée est dite divergente dans le cas contraire.

Remarque 1.6.1. Autrement dit, ces intégrales sont convergentes si les primitives de f (resp. g) admettent une limite finie à gauche en b (resp. à droite en a).

Exercice 1.6.2. Déterminer la nature des intégrales suivantes et les calculer si elles convergent : $\int_0^1 \ln(t)\,dt$, $\int_0^1 \frac{1}{1-t}\,dt$.

1.7. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle ouvert.

Méthode : Intégration sur un intervalle ouvert $]a;b[$ (hors programme) ou $]a;+\infty[$ (hors programme) ou $]-\infty;b[$ (hors programme) ou $]-\infty;+\infty[$.

Si f est continue sur $]a;b[$ (resp. $]a;+\infty[$ ou $]-\infty;b[$), on sépare l'étude en deux cas : $]a;c]$ et $[c;b[$ (resp. $]a;c]$ et $[c;+\infty[$, ou $]-\infty;c]$ et $[c;b[$).

L'intégrale est convergente si chacune des intégrales ainsi obtenues est convergente. On fait la somme des deux résultats pour obtenir la valeur de l'intégrale. Dans le cas contraire, l'intégrale est divergente.

Exercice 1.7.1.

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes et les calculer si elles convergent :
$$\int_0^1 \frac{1}{t\ln(t)}\,dt,\ \int_0^1 \frac{2t-1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt,\ \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

2. Soit $a>0$ et f définie par : $f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leq 0\\ ae^{-at} & \text{si } t>0\end{cases}$

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

3. Quelle est la nature de $\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2}\,dt$?

Remarque 1.7.2. Attention : si $\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ existe et est finie, cela n'implique pas forcément l'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$. Par exemple, avec $f(t)=t^3$, $\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \lim_{a\to+\infty} 0 = 0$, mais $\int_{-\infty}^{+\infty} t^3\,dt$ n'existe pas.

1.8. Bilan : existence d'une intégrale.

Méthode : Existence d'une intégrale sur un segment ou un intervalle.

On note a et b deux réels, avec $a<b$.

- Intégrales toujours définies qui ne nécessitent pas d'étude de convergence :
  - Si la fonction f est continue sur le segment $[a;b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est toujours définie.

- **Intégrale faussement impropre en un réel :** Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a;b[$ et prolongeable par continuité en b^-, on note g son prolongement (g est continue sur le segment $[a;b]$) et on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$. (Idem en a^+)
- Si la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a;b]$, alors on décompose l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à l'aide de la relation de Chasles en une somme d'intégrales sur chaque segment de la subdivision où f est prolongeable par continuité.

- Intégrales impropres qui nécessitent une étude de convergence :
  - **Intégrale impropre en réel :** (hors programme) si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a;b[$ mais non prolongeable par continuité en b^- , l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ (impropre en b) converge si, et seulement si $\displaystyle\lim_{y\to b}\int_a^y f(t)\,dt$ existe et est finie. (Idem en a^+)
  - **Intégrale impropre en $+\infty$:** si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ (impropre en $+\infty$) converge si, et seulement si $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(t)\,dt$ existe et est finie. (Idem en $-\infty$).
  - **Intégrale impropre en $+\infty$ et $-\infty$:** si f est continue sur $\mathbb{R}$, et s'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{+\infty}^c f(t)\,dt$ existent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut la somme de deux précédentes. Si l'intégrale est divergente *soit* en $+\infty$, *soit* en $-\infty$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.
  - **Intégrale impropre en plusieurs points réels :** (hors programme) Si f est continue sur $]a,b[$ et s'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge. Si *l'une des deux* diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

2. Propriétés de l'intégrale.

Dans toute la suite, a et b désignent deux éléments tels que $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ et f une fonction continue sur l'intervalle $]a;b[$. On démontrera deux cas :

1. si a et b sont réels et f continue sur le segment $[a;b]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe toujours.

2. si a est réel et f continue sur $[a;b[$, le problème de convergence se pose.

Le cas b réel et f continue sur $]a;b]$ est facilement adaptable à partir du 2^{e} cas.

Ainsi tous les résultats qui suivent s'appliquent **soit** à des intégrales de fonctions continues sur un segment (**non impropres** donc), **soit** à des intégrales **impropres convergentes**.

2.1. Propriétés élémentaires.

Proposition : Inversion des bornes.

$\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.1.1. Si f est continue sur I et $a \in I$, alors $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = F(a) - F(a) = 0$.

Proposition : Relation de Chasles.

Soit $c \in]a;b[$. Si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge, et :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. À compléter. □

Exercice 2.1.2. Calculer : $\displaystyle\int_{-2}^3 |x|\,dx$, $\displaystyle\int_0^4 \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}\,dx$.

Proposition : Linéarité de l'intégrale.

Soit α, β deux réels. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes, alors $\displaystyle\int_a^b \Big(\alpha f(t) + \beta g(t)\Big)\,dt$ converge, et on a :

$$\int_a^b \Big(\alpha f(t) + \beta g(t)\Big)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

Démonstration. À compléter. □

Exemple 2.1.3. $\displaystyle\int_0^2 \Big(2x^2 + 3e^x\Big)dx = 2\int_0^2 x^2\,dx + 3\int_0^2 e^x\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 3[e^x]_0^2 = 2\frac{8}{3} + 3(e^2-1) = \frac{7}{3} + 3e^2$.

Remarque 2.1.4. Attention : l'existence de $\displaystyle\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,dt$ n'implique pas forcément l'existence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$. Par exemple avec $f(t) = t$, $g(t) = -t$, $a = 0$ et $b = +\infty$.

2.2. **Intégrales et inégalités.**

Théorème : Positivité de l'intégrale.

Soit f une fonction continue et **positive ou nulle** sur $[a;b[$ avec $\boldsymbol{a < b}$, et d'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ convergente. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Démonstration. Il suffit de se rappeler de la définition de l'intégrale : c'est une somme pondérée de valeurs de f. □

En utilisant la linéarité et l'inversion des bornes, on peut donner les autres cas :

Méthode : Signe d'une intégrale.

Si f est une fonction de signe fixe entre a et b, d'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ convergente :

Signe de $\int_a^b f(t)\,dt$	$f \geqslant 0$	$f \leqslant 0$
$a < b$	positive ou nulle	négative ou nulle
$a > b$	négative ou nulle	positive ou nulle

Le théorème de positivité de l'intégrale peut être précisé de la façon suivante :

Théorème : Stricte positivité de l'intégrale.

Soit f est une fonction continue et **positive ou nulle** sur $]a;b[$ avec $\boldsymbol{a < b}$, et d'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ convergente.

1. Si f n'est pas identiquement nulle sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

2. Par contraposition, si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a;b]$.

Démonstration. C'est un peu délicat, regardons seulement l'idée de la preuve. □

Corollaire : Croissance de l'intégrale.

Soit f et g deux fonctions continues sur $]a;b[$ et d'intégrales convergentes. Si $f \leqslant g$ sur $]a;b[$, avec $a < b$, alors : $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

Démonstration. On applique le théorème 2.2 à la fonction $g - f$ positive sur $]a;b[$, puis on conclut en utilisant la linéarité. □

Remarque 2.2.1. Cette proposition signifie que l'on peut intégrer des inégalités, à condition que les bornes de l'intégrale soient dans l'ordre croissant. Si les bornes sont dans le mauvais ordre, les inégalités sont renversées.

Corollaire : Inégalité de la moyenne.

Soit a et b deux réels et supposons l'existence de deux nombres réels m et M tels que : $\forall t \in [a;b]$, $m \leq f(t) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

Démonstration. Il suffit d'intégrer l'inégalité $m \leq f(t) \leq M$ pour t entre a et b. □

Remarque 2.2.2. Il s'agit d'une version "intégrale" de l'inégalité des accroissements finis.

Corollaire : Inégalité triangulaire.

On suppose a et b réels avec $a < b$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant (b-a) \max_{t\in[a;b]} |f(t)|\,.$$

Remarque 2.2.3. Il s'agit d'une version "somme continue" de l'inégalité triangulaire classique des réels : $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Démonstration. À compléter. □

Définition : Valeur moyenne.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ ($a \leq b$). On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Remarque 2.2.4. Autrement dit : si f est toujours comprise entre m et M alors sa valeur moyenne l'est également.

3. Techniques de calcul.

Nous nous intéressons maintenant aux possibilités de calcul explicite d'intégrales.

3.1. **Primitives usuelles.** Comme nous l'avions déjà remarqué, la méthode la plus naturelle et qui reste la plus utilisée et la plus efficace consiste à **repérer une dérivée dans la fonction à intégrer.**

En plus des dérivées de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, polynômes,...), il faut aussi apprendre à repérer les dérivées de fonctions composées(voir le tableau 1.2).

Pour les intégrales impropres, il faut en repasser par la limite de la primitive.

Méthode : Calcul d'intégrale par primitives usuelles.

Si on reconnaît un schéma du type $u'e^u$, $\frac{u'}{u}$ ou $u'u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$), on peut calculer une primitive de la fonction à intégrer et on peut faire le calcul directement.

Dans le cas d'une intégrale impropre, on cherche à calculer l'intégrale sur un segment puis on passe à la limite, si elle existe.

Exercice 3.1.1. Calculer : $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}dx$, $\int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$

3.2. **Intégration par parties.** Dans le cas de l'intégrale d'un produit de deux fonctions, on peut parfois procéder par parties :

Théorème : Intégration par parties.

Soit a et b deux réels ($a < b$) et u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. À compléter. □

Attention aux hypothèses ! Avant de faire une intégration par parties, il faut bien faire attention à ce que les fonctions soient de classe $\mathcal{C}^1$: il faut que la fonction soit dérivable pour pouvoir la dériver et que la dérivée soit continue pour pouvoir l'intégrer.

Attention aussi, cette formule d'intégration par parties ne s'applique qu'à un intervalle sur lequel les fonctions sont toutes bien définies et continues. Dans le cas d'une intégrale impropre, on ne se sert de cette formule que sur un segment borné puis on cherche à passer à la limite.

Remarque 3.2.1. On appliquera souvent la "règle du LPE" : on dérive la fonction la plus faible dans les croissances comparées (logarithmes - puissances - exponentielles) et on intègre la plus forte.

Méthode : Intégration par parties.

On choisit laquelle des deux fonctions est u' (celle dont on doit pouvoir calculer une primitive, parfois $u'(t) = 1$) et l'autre est v (celle que l'on va dériver). On vérifie que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ entre a et b et on applique la formule.

Dans le cas d'un produit exponentielle-polynôme, on dérive le polynôme et on intègre l'exponentielle. Dans le cas d'un produit logarithme-polynôme, on dérive le logarithme et on intègre le polynôme. En résumé : on dérive la fonction la plus faible et on intègre la plus forte (dans les croissances comparées).

Si l'intégrale est impropre, on effectue toujours l'intégration par parties sur un segment puis on passe à la limite, si elle existe.

Exercice 3.2.2. Calculer $\displaystyle\int_1^e \ln(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$.

Exercice type concours.

Soit p et q deux entiers naturels. On pose : $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\, dx$.

1. Exprimer $I_{p+1,q}$ en fonction de $I_{p,q+1}$.

2. Calculer $I_{0,q}$.

3. En déduire l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

Exercice type concours.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\, dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. *On pourra faire un encadrement.*

2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

3. En déduire que $I_n = n!\left(1 - \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)$.

4. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

3.3. Changement de variable.

Théorème : Changement de variable.

Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]a;b[$ et f une fonction continue sur l'intervalle $]u(a);u(b)[$ ou $]u(b);u(a)[$. Alors on a :

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx.$$

Démonstration. À compléter. □

Méthode : Changement de variable dans une intégrale.

Il y a trois étapes :

1. Remplacer la variable : $u = u(t)$ et aussi t en fonction de u ;

2. Changer les bornes : a est remplacé par $u(a)$, b est remplacé par $u(b)$;

3. Changer le dt en suivant la règle suivante : $\frac{du}{dt} = u'$ i.e. $dt = \frac{1}{u'} du$ à exprimer en fonction de u.

Si l'intégrale est impropre, on effectue le changement de variable sur un segment puis on passe à la limite (si elle existe). Dans le cas d'un changement de variable affine ($u = \alpha t + \beta$), on peut le faire directement dans l'intégrale impropre en écrivant l'expression "sous réserve de convergence".

Exercice 3.3.1.

1. Déterminer deux réels c et d tels que $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1}$ puis calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1} dx$ en posant $u = e^x$.
2. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2y+a)^2} dy$.

Exercice 3.3.2. Calculer :

1. $I_1 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$.
2. $I_2 = \int_1^2 3^t\, dt$.
3. $I_3 = \int_0^1 \sqrt{1+4u}\, du$.
4. $I_4 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$.
5. $I_5 = \int_0^2 \frac{1}{t^2+4t+4} dt$.
6. $I_6 = \int_0^n x\lfloor x \rfloor\, dx$.
7. $I_7 = \int_1^4 \frac{1+t}{1+\sqrt{t}} dt$.

Pour I_7, poser $u = \sqrt{t}$ puis déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $\frac{2x+2x^3}{1+x} = ax^2+bx+c+\frac{d}{1+x}$ pour tout $x \neq -1$.

Proposition : Intégrales de fonctions paires ou impaires sur un intervalle symétrique.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle symétrique I.

1. Si f est paire sur I :
   - Pour tout $y \in I$, $\int_{-y}^{y} f(t)\, dt = 2\int_0^y f(t)dt$.
   - Pour $I = \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si, et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
2. Si f est impaire sur I :
   - Pour tout $y \in I$, $\int_{-y}^{y} f(t)\, dt = 0$.
   - Pour $I = \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si, et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.

Démonstration. À compléter.

□

Remarque 3.3.3. En particulier, si f est paire ou impaire et si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge également. Et dans le cas d'une fonction impaire, ce n'est pas parce que $\displaystyle\int_{-y}^{y} f(t)dt = 0$ que l'intégrale converge !

3.4. **Fonction définie par une intégrale dépendant de ses bornes.** Nous avions déjà observé que $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f. Par ailleurs on sait que F s'annule en a, ce qui résout l'ambiguïté de la constante additive dans le choix de la primitive.

Théorème : Théorème fondamental : primitive sous forme intégrale.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$. La fonction F définie pour tout réel x de I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est **la** primitive de f s'annulant en a. De plus, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exemple 3.4.1. C'est de cette façon que la fonction ln peut être définie : il s'agit de la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui s'annule en 1 : $\boxed{\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.}$

De la même façon, on cherche la primitive F de la fonction ln s'annulant en $a > 0$ en écrivant $F(x) = \displaystyle\int_a^x \ln(t)\,dt$, pour $x > 0$.

De cette remarque, on peut en déduire l'étude des fonctions définies par des intégrales dont les **deux** bornes sont variables.

Méthode : Fonction définie par une intégrale.

On pose $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ où u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et f est une fonction continue sur un intervalle I. Le but est d'étudier la fonction G.

- Le domaine de définition de G est l'ensemble des réels x pour lesquels f est continue entre $u(x)$ et $v(x)$ (donc $u(x) \in I$ et $v(x) \in I$).
- Ensuite, on choisit une primitive F de f sur I, et on exprime G à l'aide de F :
$$G(x) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big).$$
  Par somme et compositions, G est de classe $\mathcal{C}^1$, et en utilisant la formule de dérivation composée :
$$G'(x) = F'\big(v(x)\big) \times v'(x) - F'\big(u(x)\big) \times u'(x) = f\big(v(x)\big)v'(x) - f\big(u(x)\big)u'(x).$$
  On peut ensuite déterminer le signe de G' et les variations de G.
- Les limites et extrema sont en revanche plus délicats à calculer. Pour les limites, on utilise souvent les théorèmes d'encadrement ou de minoration.

Exercice 3.4.2. Déterminer le domaine d'existence, et calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^x 2te^{1+t^2}\,dt$ puis $J(x) = \displaystyle\int_0^x 2t^3e^{1+t^2}\,dt$.

Exercice type concours.

Soit G la fonction définie par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de G.

2. Étudier les variations de G.

3. Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$.

4. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[,\quad x^2\ln(2) \leq G(x) \leq x\ln(2)$$
$$\forall x > 1,\quad x\ln(2) \leq G(x) \leq x^2\ln(2).$$

On pourra utiliser : $\displaystyle\frac{1}{\ln(t)} = t\left(\frac{1}{t}\ln(t)\right)$.

5. Déterminer les limites de G aux bornes de son ensemble de définition. Pourquoi peut-on prolonger G par continuité en 0 et en 1 ?

3.5. **Suites d'intégrales.** Il n'y a pas vraiment de méthode systématique pour étudier les suites d'intégrales. Voici cependant quelques idées qui permettent de traiter les situations les plus classiques (qui sont aussi les plus fréquentes).

Méthode : Suites d'intégrales.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions définies sur le même intervalle I, a et b deux réels ou bornes de I. On souhaite étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt$.

- **Définition :** la suite est bien définie si chacune des intégrales existe, donc si la fonction est continue (ou continue par morceaux, ou prolongeable par continuité) et si chacune des intégrale I_n est convergente.
- **Monotonie :** on calcule la différence grâce à la linéarité :
$$I_{n+1} - I_n = \int_a^b f_{n+1}(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \Big(f_{n+1}(t) - f_n(t)\Big)\,dt.$$
On cherche le signe de $f_{n+1}(t) - f_n(t)$ pour t entre a et b, le plus souvent par factorisation puis produit de signes.
On conclut avec le théorème de positivité 2.2 avec $a < b$ ou $a > b$.
- **Minoration, majoration, encadrement :** on minore, ou on majore, ou on encadre la fonction f_n, puis on conclut en intégrant cette (ces) inégalité(s) en utilisant la croissance de l'intégrale (proposition 2.2) et $a < b$ ou $a > b$.
Si f_n est un produit de fonctions dont l'une dépend de n et pas l'autre, on conserve la fonction qui dépend de n et on minore (ou majore, ou encadre) l'autre pour t entre a et b.
- **Convergence :** la plupart du temps, grâce au théorème de limite monotone.
- **Valeur de la limite :** souvent, grâce au théorème des encadrements.
- **Formule de récurrence :** on peut exprimer I_{n+1} en fonction de I_n en "calculant" I_{n+1} par parties, on retrouve I_n.
Si f_{n+1} est produit de fonctions, on dérive l'une et on intègre l'autre pour essayer de faire apparaître f_n dans l'intégrale résiduelle de l'intégration par parties.

Exercice 3.5.1 (Intégration d'une somme de suite géométrique.).

1. Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$ pour tout $t \neq 1$.

2. En déduire que $\displaystyle -\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt$ pour tout $0 < x < 1$.

3. Montrer que $-\ln(1-x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$.

4. Interpréter ce résultat en termes de séries.

Remarque 3.5.2. Erreur à ne pas commettre : on ne peut pas "passer à la limite" dans une intégrale. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$ n'implique pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. C'est n'est vrai que **sous certaines conditions** et ces conditions sont hors programme.

Exercice 3.5.3. On considère la fonction définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n^3 t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2n} \\ -2n^3 t + 2n^2 & \text{si } \frac{1}{2n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Calculer et comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$.

3.6. **Intégrales de référence.** L'intérêt de ce paragraphe est double. D'une part, il donne la valeur de quelques intégrales impropres et il nous évite d'avoir à refaire systématiquement le calcul. Mais d'autre part, comme dans le cas des séries, il nous permettra de comparer des intégrales dont on ne connaît pas la nature convergente ou divergente avec ces intégrales de référence.

Théorème : Intégrales de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ ou intégrales de Riemann.

Soit α un nombre réel strictement positif.

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 1$.
- (hors programme) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si, et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 3.6.1. On constate que **toutes** les intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

sont divergentes.

Remarque 3.6.2 (Résultat non exigible, à savoir recalculer si demandé). Dans le cas où elles convergent, les intégrales de Riemann ont pour valeur :

- Si $0 < \alpha < 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha} (> 0)$.
- Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1} (> 0)$.

Exercice 3.6.3. **1.** Les intégrales suivantes sont-elles convergentes : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{92}}\,dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r}}\,dr$.

2. Les intégrales $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$, $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{t^2}\,dt$, $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ sont-elles convergentes ?

Théorème : Intégrales de $t \mapsto e^{-\lambda t}$.

Soit λ un nombre réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ est convergente si, et seulement si $\lambda > 0$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 3.6.4 (Résultat non exigible, à savoir recalculer si demandé.)*.* Dans le cas où elle converge, l'intégrale vaut : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$. C'est une conséquence de la preuve précédente.

Remarque 3.6.5*.* On rappelle qu'en probabilités, la loi exponentielle est une loi à densité donnée par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Le calcul précédent montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1,$$

ce qui signifie que la fonction f est bien une densité de probabilités.

Théorème : Intégrale de Gauss.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Démonstration. Admis. □

Exercice 3.6.6*.* Convergence, et valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$?

4. Critères de convergence.

4.1. **Critère spécifiques de convergence pour les fonctions positives.** Nous énonçons quatre théorèmes pour les intégrales généralisées sur $[a; +\infty[$. Ils ont leurs équivalents pour les autres types d'intégrales généralisées. Ces théorèmes sont valables lorsque les fonctions sont positives au voisinage du point où l'intégrale n'est pas bien définie.

Théorème : Majoration des primitives.

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a; +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si, et seulement si la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_a^y f(t)\,dt$ est majorée sur $[a; +\infty[$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 4.1.1*.* Autrement dit, pour une fonction continue et positive f sur $[a; +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si, et seulement si les primitives de F sont majorées sur $[a; +\infty[$.

Théorème : Critère de comparaison par majoration.

Soit f et g deux fonctions continues et **positives** sur un intervalle $[a; +\infty[$ telles que :

$$\forall t \in [a; +\infty[, \qquad (0 \leqslant) f(t) \leqslant g(t).$$

Alors :

- Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

Démonstration. À compléter. □

Exercice 4.1.2. **1.** Montrer que pour tout $t > 0$, $\frac{1}{t^2} \geqslant \frac{1}{t^2+t+1}$.

2. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$?

Exercice 4.1.3. Étudier la nature et calculer (lorsque c'est possible) les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-2t+3}dt$

2. $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}dt$ (hors programme)

3. $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2u+3}du$

4. $I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^\alpha}dt$ avec $\alpha \neq 1$.

Remarque 4.1.4. Dans le cas où les intégrales sont convergentes, on a de plus : $0 \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$.

Définition : Fonctions négligeables.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in I$, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, et on note : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathbf{o}(g(x))$ si, et seulement si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Théorème : Critère de comparaison par négligeables.

Soit f et g deux fonctions continues et **positives** sur un intervalle $[a;+\infty[$ telles que : $f(t) = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(g(t))$ Alors :

- Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

Démonstration. Admis. □

Exercice 4.1.5. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)+2}{t^3+1}\,dt$?

Définition : Fonctions équivalentes.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in I$, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, et on note : $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ si, et seulement si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Théorème : Critère de comparaison par équivalents.

Soit f et g deux fonctions continues et **positives** sur un intervalle $[a;+\infty[$ telles que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature.

Démonstration. Admis. □

Remarque 4.1.6.

- "De même nature" signifie qu'elles convergent ou divergent simultanément : l'une converge si et seulement si l'autre converge.
- Attention, dans le cas où elles convergent, les intégrales n'ont pas forcément la même valeur.

Exercice 4.1.7. **1.** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-5t+7}{4t^3+2t+1}\,dt$?

2. On considère la fonction g définie par : $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}+t^3} & \text{si } t > 0 \end{cases}$. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$?

Exercice 4.1.8. Étudier la convergence des intégrales suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1}$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^4 e^{-u}\,du$

4. $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{x^4+1}\,dx$

5. $I_6 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+t^2+1}\,dt$

6. $I_7 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{t}+t}{t+t^2}\,dt$

4.2. Convergence absolue.

Définition : Convergence absolue.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,+\infty[$. On dit que que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est **absolument convergente** si, et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est convergente.

Exemple 4.2.1. Soit $f : t \mapsto \dfrac{-1}{t^2}$. Alors l'intégrale de f sur $[1;+\infty[$ est absolument convergente, car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

Théorème : La convergence absolue implique la convergence.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle non borné $[a;+\infty[$. Si l'intégrale de f sur $[a;+\infty[$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration. Admis. □

Remarque 4.2.2. La réciproque est fausse.

4.3. **Comparaison série-intégrale.** Mentionnons enfin un dernier résultat que l'on a déjà vu dans le chapitre sur les séries numériques. Il s'agit de faire le lien entre la nature d'une série (convergente ou divergente) et la nature d'une intégrale. Dans le cours sur les séries, nous avions utilisé ce résultat pour en déduire la nature d'une série lorsque l'on connaît le comportement de l'intégrale. Mais on peut en fait utiliser aussi la réciproque de ce théorème : utiliser la convergence ou la divergence d'une série pour en déduire la nature de l'intégrale.

Théorème : Comparaison série-intégrale.

Soit f une fonction **continue**, **positive** et **décroissante** sur l'intervalle $[a; +\infty[$. Alors la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Démonstration. On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les séries.

□

Exercice type concours.

On note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{1}{4n} I_n$.

4. En déduire une expression de I_n en fonction de n et I_1.

Exercice type concours.

On considère $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx$ et $J_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1}\,dx$, $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que I_p est une intégrale convergente pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p.

3. En déduire une expression de I_p en fonction de p.

4. Montrer que J_p existe pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice type concours.

Fonction Gamma

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, l'intégrale impropre
$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$
est convergente.

2. On pose pour tout $x > 0$: $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, puis calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n non nul.

5. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Remarque 5.0.1. **1.** Nous traiterons certains des sujets suivants en exercices, en travaux dirigés, en colles ou en devoir. Pour les autres, il existe des corrigés que l'on trouve facilement sur Internet. Ces corrigés sont parfois très rapides, n'hésitez pas à venir m'en parler si vous pensez qu'une question mérite des explications supplémentaires.

2. Les sujets de concours sont souvent pensés pour faire appel à plusieurs parties du programme. Dans la liste qui suit figurent les exercices pour lequel il est *nécessaire* de connaître les résultats de ce chapitre. Mais parfois *ce n'est pas suffisant* car d'autres parties du cours sont aussi impliquées. J'indique ces situations avec le symbole $\star$.

3. Cette liste n'est pas exhaustive. En fait, en exagérant à peine, on pourrait argumenter que **tous** les sujets de concours ont quelques questions d'intégration. En effet, il y a des intégrales à la fois dans les exercices d'analyse, mais aussi dans les exercices sur des variables aléatoires à densités (l'espérance, la variance et tous les moments d'une loi de probabilité s'expriment avec une intégrale, d'ailleurs souvent impropre).

1. ECRICOME

- 1988 Problème $\star$.
- 1989 Problème $\star$ (la fin est un exercice d'intégration pur).
- 1990 Exercice 2.
- 1991 Exercice 2 et Problème $\star$.
- 1992 Exercice 1 et Problème $\star$.
- 1993 Problème 2ème partie.
- 1995 Exercice 1 (dorénavant hors programme).
- 1996 Exercice 2.
- 1998 Exercice 1.
- 1999 Exercice 3 $\star$.
- 2000 Exercice 1 $\star$ et Exercice 3 $\star$ (ce n'est pas le coeur du sujet dans les deux cas).
- 2002 Exercice 2.
- 2003 Exercice 3 $\star$ (un peu).
- 2004 Exercice 3 $\star$ (un peu).
- 2005 Exercice 1.
- 2006 Exercice 2 (la fin seulement est $\star$).
- 2010 Exercice 2 $\star$.
- 2012 Exercice 2.
- 2015 Exercice 1 $\star$.
- 2016 Exercice 2 (la fin seulement est $\star$).
- 2020 Exercice 2 $\star$.
- 2021 Exercice 2.
- 2023 (sujet 0) Exercice 2.

2. EDHEC

- 1997 Problème 2ème partie $\star$.
- 1999 Exercice 2 (la fin).
- 2000 Exercice 1.
- 2001 Exercice 3 (même si le contexte est probabiliste, c'est un pur exercice d'intégration).
- 2003 Exercice 1.
- 2004 Exercice 1 et Problème $\star$.
- 2005 Exercice 3.
- 2007 Exercice 3.

- 2008 Exercice 3 ⋆.
- 2009 Exercice 3.
- 2012 Problème ⋆.
- 2014 Exercice 2 et Problème ⋆.
- 2015 Exercice 3 ⋆⋆ et Problème ⋆.
- 2018 Exercice 3 ⋆ et Problème.
- 2019 Exercice 3 (un argument utilise la loi normale).
- 2020 Problème.
- 2022 Exercice 3 et Problème.

3. EML

- 2000 Exercice 2.
- 2001 Exercice 3.
- 2003 Exercice 3 ⋆.
- 2005 Exercice 2.
- 2006 Exercice 2 ⋆.
- 2008 Exercice 1 (la fin est ⋆).
- 2009 Exercice 1.
- 2012 Exercice 3 ⋆.
- 2013 Exercice 1 (la fin est ⋆).
- 2017 Exercice 1.
- 2018 Exercice 2 (la fin est ⋆).
- 2019 Exercice 1 ⋆.
- 2021 Problème 1 ⋆.
- 2022 Exercice 3.
- 2023 (sujet 0) Exercice 2.

4. ESCP

- 1982 Épreuve 1 Exercice 4.
- 1986 Épreuve III Exercice 3.
- 1987 Épreuve III Exercice 1 et Exercice 3 ⋆.
- 1988 Épreuve III Exercice 3 (une somme de Riemann).
- 1989 Exercice 2 ⋆
- 1991 Épreuve III Exercice 2.
- 1992 Épreuve III Exercice 2.
- 1993 Épreuve III Exercice 2 (hors programme aujourd'hui).
- 1994 Épreuve III Exercice 1.
- 2000 Épreuve III Exercice 3 ⋆.
- 2001 Épreuve III Exercice 2.
- 2005 Épreuve III Problème.

5. ESC

- 2004 Exercice 2.
- 2005 Exercice 2.

- 2006 Exercice 3 $\star$.

6. ESSEC

- 1982 Épreuve I Exercice 1, 2 et 3.
- 1983 Épreuve I Exercice 2.
- 1986 Épreuve I Exercice 1.
- 1990 Épreuve I Exercice 2.
- 1996 Épreuve III Problème 1.
- 2000 Épreuve III Exercice 2 (hors programme).
- 2001 Épreuve III Exercice 1 (hors programme).
- 2003 Épreuve II $\star$.
- 2005 Épreuve II Partie II $\star$.
- 2005 Épreuve III Exercice 2.
- 2006 Épreuve II Partie II $\star$.
- 2010 Épreuve II Partie I $\star$ et II $\star$.
- 2015 Épreuve II Exercice 3.
- 2016 Épreuve I Partie I.
- 2017 Épreuve II Partie II.

7. HEC Beaucoup de questions d'intégration éparpillées dans des contextes probabilistes.